連接-構成可能対応について

桑垣 樹 (くわがき たつき)
東京大学大学院数理科学研究科

Abstract

この論説は 2016 年の代数幾何学城崎シンポジウムの報告集用に書かれた。講演の機会を与えてくださった世話人の方々に感謝する。

1 Introduction - 超局所幾何？-

「超局所 (microlocal)」という言葉は、雑に言って「余接方向を含めて考える」ということを意味する。もともと、この「余接方向を含めて考える」というアイデアは 1950 年代の解析学において生まれた。1970 年代の佐藤幹夫による $\mathcal{D}$-加群の発明 [SKK73] は超局所のアイデアを層の理論に必然的に輸出し、佐藤の学生である柏原正樹は Riemann-Hilbert 対応をそのアイデアを有効に用いて定式化した [Kas84]。その後、柏原とその共同研究者 Pierre Schapira は、超局所層理論の基礎を確立する本 [KS85, KS90] を書き、この分野のバイブルとなっている。

超局所層理論における最も[1] 大事な概念は、超局所台 (microsupport) である。超局所台は多様体上の層 (の複体) に対して、余接束のある部分集合を対応させるものである（定義は 2 節参照)。層が、特に「構成可能 (constructible)」である場合には、その超局所台は余接束の自然なシンプレクティック構造についてラグランジュ部分集合になる。ここで、ラグランジュ部分集合とは、ラグランジュ部分多様体を稠密部分集合として持つ集合である。つまり、特異点をもちうるラグランジュ部分多様体ということである。Weinstein の「ラグランジアン帝国」という言葉がさすとおり、この観察は超局所層理論のシンプレクティック幾何への多大な応用を想わせる。

そして、(もちろんシンプレクティック幾何側の発展・問題意識の成長も待ったのち)、2000 年代中ごろから超局所層理論はシンプレクティック幾何へ応用され始める。発展の一部を以下に列挙する。

(i) 2006 Nadler-Zaslow [NZ09, Nad09]: 余接束の深谷圏と底多様体の構成可能層の導来圏が同値。

(ii) 2008 Tamarkin [Tam08]: シンプレクティック多様体の部分集合に関する不動性問題 (non-displaceability problem) にたいする超局所層理論を用いたアプローチ。

(iii) 2008 Fang-Liu-Treumann-Zaslow [FLTZ11, FLTZ12]: トーリック多様体の同変ホモロジー的ミラー対称性の証明 (連接-構成可能対応)。

(iv) 2010 Guillermou-Kashiwara-Schapira [GKS12]: ハミルトニアンイソトピーの層理論的持ち上げ（層量子化, sheaf quantization）。

[1] 個人の感想です。

(v) 2014 Shende-Treumann-Zaslow [STZ14]: ルジャンドル結び目への応用。

(vi) 2015 Guillermou [Gui12]: 余接束のラグランジュ部分多様体に対するArnol'd予想(Nearby Lagrangian conjectureの弱い形)の再証明。余接束のコンパクトラグランジュ部分多様体の層量子化。

(vii) 2015 Tamarkin [Tam15]: 閉シンプレクティック多様体に対して、超局所層理論をもちいて（深谷圏と関係があると期待さる）圏を構成。

(viii) 2013-2016 Nadler [Nad15, Nad16a, Nad16b]: Landau-Ginzburg模型 $W = z_1 \cdots z_n$ に対するホモロジー的ミラー対称性の証明、巻き深谷圏(wrapped Fukaya category)の対応概念として巻き構成可能層(wrapped constructible sheaf)の導入。

(ix) 2016: BenZvi-Nadler[BZN16]: 幾何学的Langlands対応への応用。

これら超局所層理論へのシンプレクティック幾何への応用は、超局所幾何(microlocal geometry)と呼ばれることがある。

この短い論説では、これらの一つ一つに立ち入ることはできない。以下の章では、(i)、(iii)と(viii)（および(vi)の一部）について、筆者の研究に関わるところを説明していく。それらを説明するためには、超局所層理論に少し立ち入らなければならないので、2節で準備を行う。3節では、(iii)トーリック多様体のホモロジー的ミラー対称性にたいするFang-Liu-Treumann-Zaslowのアプローチ・予想を説明し、4節で筆者による証明のアイデアを紹介する。

2 超局所層理論からの準備

ここでは超局所層理論について、超局所台と構成可能層についてだけ簡単な説明をする。詳細な説明は柏原-Schapira [KS90]を参照。

Zを多様体、EをZ上の層(もしくは層の複体)とする。Eの超局所台は、雑に言って、Eの(1)層としての台と(2)Eのコホモロジーが同型に延びない(余)方向を測るものである。定義は以下のとおり。超局所台はその補集合で定義する。

Definition 2.1. T^*Zの点(x,ξ)がEの超局所台(SS(E)と書く)に入らないとは、(x,ξ)のある近傍Uが存在し以下を満たす。xの近傍上で定義された任意の滑らかな関数fがfの微分dfのグラフGraph(df)がUに含まれるとする。任意の$y \in \pi(U)$(ここで$\pi\colon T^*Z \to Z$は射影)について、

$$\Gamma_{\{z|f(z)\geq f(y)\}}(E)_y \simeq 0 \tag{2.1}$$

ここで、$\Gamma_{\{-\}}(-)$は局所コホモロジー層の記号である。

$x \in \mathrm{supp}(E)$について、$f = 0$を上の定義に当てはめると、$x \in \mathrm{SS}(E)$を与える。これが(1)の「層としての台を測る」である。さらに、$\mathrm{SS}(E) \cap T^*_Z Z = \pi(\mathrm{SS}(E)) = \mathrm{supp}(E)$が成立する。(2)において「方向」と述べたことからも類推されるように、超局所台は余接束のファイバーごとのスケール変換について不変である。(2)についての説明は、構成可能層を定義したのち、例を通じ説明する。

多様体Zについて、Zの滑層分解(stratification)とは、Zの局所閉部分集合の集合$\mathcal{S}$であり、

(i) $Z = \bigsqcup_{S \in \mathcal{S}} S$と

(ii) もし$S, S' \in \mathcal{S}$について$S \cap \overline{S'} \neq \varnothing$なら、$S \subset \overline{S}$。

が成立するものである。

以下では、Z は実解析多様体であると仮定する。すると、Z の部分集合 S が半解析的 (semianalytic) であるとは、局所的には実解析関数の不等式で書けるような集合のブール演算による結果として得られるときをいう。半解析的集合の集合を実解析固有射の像をとる操作について閉じるように拡大したとき、その拡大された集合の元を副解析的集合 (subanalytic) という。滑層分解 $\mathcal{S}$ の各元が副解析的集合であるとき、その滑層分解 $\mathcal{S}$ を副解析的滑層分解とよぶ。また、$\mathbb{C}_Z$ は Z 上の $\mathbb{C}$ 値定数層であるとする。

Definition 2.2. 実解析多様体 Z 上の $\mathbb{C}_Z$ 加群層 E が構成可能であるとは、Whiteney 条件を満たす副解析的滑層分解 $\mathcal{S}$ が存在して、E の各 $S \in \mathcal{S}$ への制限が有限階数の局所定数層になっていることをいう。

Whiteney 条件についてはここでは省略する (柏原-Schapira [KS90] を見よ)。この論説では、以下のような簡単な構成可能層についてのみ考える。

Example 2.3. (i) 一つ目の例として、$Z = \mathbb{R}$ として $0 \in \mathbb{R}$ 上の摩天楼層 $\mathbb{C}_0$ を考える。すると、$\mathbb{C}_0$ は構成可能層である。実際、$\mathbb{R}$ の滑層分解を $\mathcal{S} = \{\{0\}, \mathbb{R}_{<0}, \mathbb{R}_{>0}\}$ にとると、$\mathbb{C}_0$ の各滑層への制限は確かに局所系である：$\mathbb{C}_0|_{\{0\}} = \mathbb{C}, \mathbb{C}_0|_{\mathbb{R}_{<0}} = 0, \mathbb{C}_0|_{\mathbb{R}_{>0}} = 0$。

つぎに $\mathbb{C}_{\{0\}}$ の超局所台を計算してみる。$\pi(\mathrm{SS}(\mathbb{C}_0)) = \{0\}$ より、0 の上についてだけ調べればよい。ある $\epsilon < 0$ をとる。すると、開区間 $(\epsilon, 0)$ 上でのコホモロジーは消えている：$H^*((\epsilon, 0), \mathbb{C}_0) \simeq 0$。一方、任意の $\eta > 0$ をさらにとると、開区間 (ϵ, η) 上でのコホモロジーは消えていない: $H^*((\epsilon, \eta), \mathbb{C}_0) \cong \mathbb{C}$。つまり、制限写像 $H^*((\epsilon, \eta), \mathbb{C}_0) \to H^*((\epsilon, 0), \mathbb{C}_0)$ は同型ではない。この「同型でない」というのが超局所台の定義の直前で述べた「コホモロジーが同型に延びない」の意味である。

この計算から、$0 \in \mathbb{R}$ から見てプラス方向が $\mathrm{SS}(\mathbb{C}_0)$ に含まれていることがわかる。ここで「プラス方向」とは 0 上での余接ファイバーの部分集合でプラス方向に対応する半開区間のことである。同様な計算で、$0 \in \mathbb{R}$ から見てマイナス方向も $\mathrm{SS}(\mathbb{C}_0)$ に含まれている。結局、$\mathrm{SS}(\mathbb{C}_0)$ は 0 上の余接ファイバー $T_0^*\mathbb{R}$ である。(ここでは大雑把な計算を説明したが、定義に沿った計算と何も変わらない)。

一般の実解析多様体 Z について、その部分多様体 Z' 上の摩天楼層の超局所台は、Z' の余法束になる。上の計算は、この事実の最も簡単な例である。

(ii) 次に、実解析多様体 Z 上の局所定数層 L を考える。。超局所台の定義は Z 上局所的な定義なので、L は定数層 $\mathbb{C}_Z$ であるとみなしても、超局所台は変わらない。まず、$\pi(\mathrm{SS}(L)) = Z$ である。定数層は「定数」なので、層コホモロジーも「定数」である。よって、すべての方向にコホモロジーは同型に伸びるので、すべての方向は超局所台に<u>含まれない</u>。よって、局所定数層の超局所台は余接束の零切断に一致する。

この逆も成り立ち、超局所台が余接束の零切断に含まれる層は、局所定数層である。

(iii) 三つ目の例として、再び $Z = \mathbb{R}$ を考える。$i\colon (0,1) \hookrightarrow \mathbb{R}$ を開埋め込みとする。このとき、開区間 $(0,1)$ 上の定数層 $\mathbb{C}_{(0,1)}$ の i に沿った押し出し $i_*\mathbb{C}_{(0,1)}$ を考える。$\mathbb{R}$ の滑層分解を $\mathcal{S} = \{\mathbb{R}_{<0}, \{0\}, (0,1), \{1\}, \mathbb{R}_{>1}\}$ とすると、$i_*\mathbb{C}_{(0,1)}$ の各滑層への制限は有限階数局所系になっており、$i_*\mathbb{C}_{(0,1)}$ は構成可能層になっている。

つぎに、超局所台を計算する。まず、$\pi(\mathrm{SS}(i_*\mathbb{C}_{(0,1)})) = [0,1]$ である。一つ目の例と同様に ϵ, η をとる。すると、層コホモロジーは $H^*((\epsilon, 0), i_*\mathbb{C}_{(0,1)}) \cong 0$、$H^*((\epsilon, \eta), i_*\mathbb{C}_{(0,1)}) \cong 0$ と計算される。よって、一つ目の例と同様に、0 から見てプラス方向は $i_*\mathbb{C}_{(0,1)}$ の超局所台に含まれる。一方、$H^*((0, \eta), i_*\mathbb{C}_{(0,1)}) \cong \mathbb{C}$ であり、しかも制限写像 $H^*((\epsilon, \eta), i_*\mathbb{C}_{(0,1)}) \to$

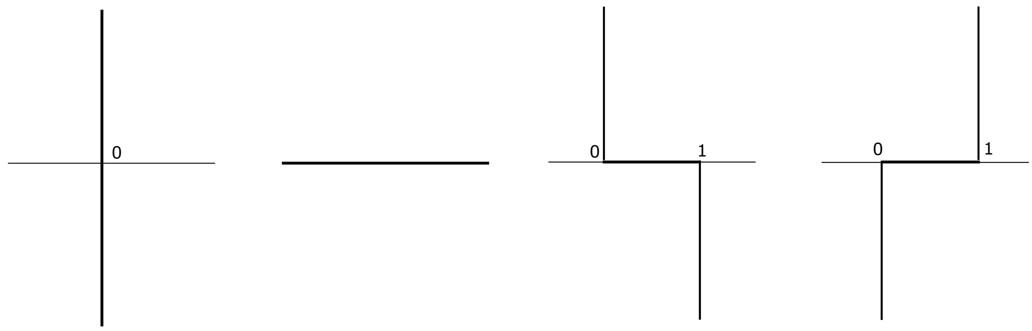

Figure 2.1: 太い線が、左から順に $\mathbb{C}_0$、$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$、$i_*\mathbb{C}_{(0,1)}$、$i_!\mathbb{C}_{(0,1)}$ の超局所台。ここで、水平方向は底の $\mathbb{R}$ を表し、垂直方向は余接ファイバー方向を表す。

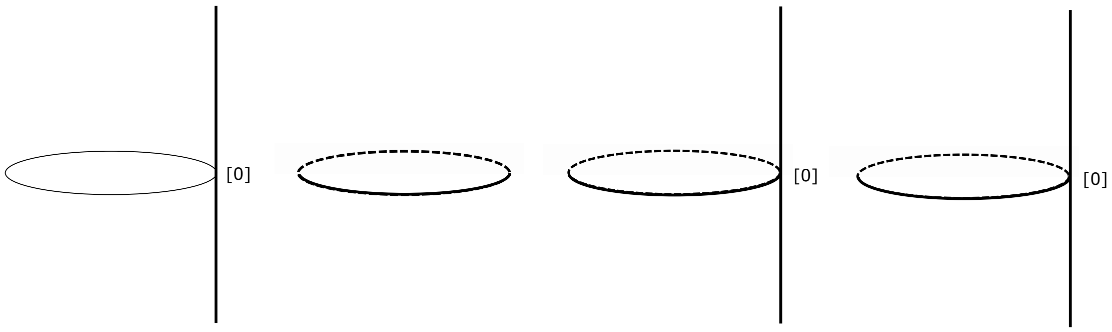

Figure 2.2: 太い線と点線が、左から順に $p_*\mathbb{C}_0$、$\mathbb{C}_{S^1}$、$p_*i_*\mathbb{C}_{(0,1)}$、$p_*i_!\mathbb{C}_{(0,1)}$ の超局所台。ここで、水平方向は底の S^1 を表し、垂直方向は余接ファイバー方向を表す。一部を点線にしたのは、正面から見て裏側を通っていることをわかりやすくするためである。

$H^*((0,\eta), i_*\mathbb{C}_{(0,1)})$ は同型である。よって、0 から見てマイナス方向は $\mathrm{SS}(i_*\mathbb{C}_{(0,1)})$ に含まれない。同様の計算を $1 \in \mathbb{R}$ の上で行うと、今度はマイナス方向が超局所台に含まれ、プラス方向は含まれない。また、$i_*\mathbb{C}_{(0,1)}$ は開区間 (0,1) 上で定数層なので、$(0,1)$ 上での超局所台は零切断に一致する。$(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}$ で x を水平方向 ξ をファイバー方向として、$\mathrm{SS}(i_*\mathbb{C}_{(0,1)})$ を絵にかくと図 2.1 のようになる。

(iv) 開区間 $(0,1)$ 上の定数層 $\mathbb{C}_{(0,1)}$ の $\mathbb{R}$ 上への零拡張を $i_!\mathbb{C}_{(0,1)}$ とする。(iii) と同様の計算を行い (もしくは Verdier 双対性を使っても簡単にわかる)、$i_!\mathbb{C}_{(0,1)}$ の超局所台は図 2.1 のようになる。

さらに、もう少し例を考える。$p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} =: S^1$ を商写像とする。すると、(i)'$p_*\mathbb{C}_0$、(iii)'$p_*i_*\mathbb{C}_{(0,1)}$、(iv)$p_*i_!\mathbb{C}_{(0,1)}$ の超局所台は図 2.2 のようになることが、上の零の計算と同様に示すことができる。ここで、(iii) と (iv) の超局所台は異なるが、(iii)' と (iv)' は全く同じ図になってしまっていることを注意したい。

上の例で、超局所台は余接束のラグランジュ部分集合である。実際、例 (i)、(iii)、(iv) とそのプライム付きでは、二次元シンプレクティック多様体 ($T^*\mathbb{R}$ か T^*S^1) の中の (特異点を許した) 一次元部分多様体であり、それらは自動的にラグランジュ部分多様体である。例 (ii) で

は零切断を扱ったが、これも任意の余接束でラグランジュ部分多様体である。この事実は以下のようにもっと一般に成り立つ。

Proposition 2.4. 構成可能層の超局所台は、ラグランジュ部分集合である。

この事実は、(ある意味では)Nadler-Zaslow によって以下の事実に昇華された。

Theorem 2.5 (Nadler-Zaslow [NZ09], Nadler [Nad09])**.** Z をコンパクト実解析多様体とする。以下の部便次数付き圏の圏同値がある。

$$\mathbf{Sh}^c(Z) \simeq \mathfrak{Fuk}(T^*Z). \tag{2.2}$$

ここで、$\mathbf{Sh}^c(Z)$ は Z 上の構成可能層の導来圏で、$\mathfrak{Fuk}(T^*Z)$ は T^*Z の導来無限小巻き深谷圏 *(derived infinitesimally wrapped Fukaya category)* である。

無限小巻き深谷圏はこの論説では定義しないが、ファイバー方向の無限遠についてよいふるまいをもつラグランジュ部分多様体を対象として持ち、射はあるバージョンのラグランジュ交叉 Floer ホモロジーを用いて定義される。ここで用いられるフレアーホモロジーを定義する際に無限遠で無限小の Reeb イソトピーを考えるので、無限小巻き深谷圏と呼ばれる。

不正確だが直感的な言い方をすると、Nadler-Zaslow の圏同値は構成可能層 (の複体) について、その超局所台の「スムージング (smoothing)」として得られるラグランジュ部分多様体を対応させる。(先の例 (iii)' と (iv)' でみたように、違う層が同じ超局所台をあたえることはあるので、これはとても不正確である。実際には、(iii)' と (iv)' には異なるスムージングが対応する。)

ラグランジュ部分多様体から始めて、構成可能層を与える方法は (これも大雑把に言って) 余接ファイバーに対する族のフレアーホモロジーで与えられる。すなわち、ラグランジュ部分多様体 $L \subset T^*Z$ にたいして、対応する構成可能層（の複体）の $z \in Z$ での茎は、z での余接ファイバー T^*_zZ と L の間のフレアー複体 $CF(T^*_zZ, L)$ のようなもので与えられる。

3 The coherent-constructible correspondence via homological mirror symmetry

いよいよ超局所幾何をホモロジー的ミラー対称性に応用する。一次元複素射影空間 $\mathbb{P}^1$ のミラー多様体を通して説明をする。

ミラー対称性はシンプレクティック幾何と複素幾何の間にある関係であり、それを言い表す一つの方法が Kontsevich のホモロジー的ミラー対称性予想 [Kon95] である。この予想はそれぞれの幾何学に起源をもつ圏の間の圏同値を予言する：シンプレクティック幾何側では深谷圏（およびそれと似たように定義される圏)、複素幾何側では連接層の有界導来圏（およびそれと似たように定義される圏）である。

それでは $\mathbb{P}^1$ のミラー対称性をつうじて、まずは普通のホモロジー的ミラー対称性を説明する。$\mathbb{P}^1$ のミラーは、一次元代数的トーラス $\mathbb{C}^*$ 上の Laurent 多項式 $W = z + \frac{1}{z}$ であることが知られている [Giv95, HV00]。$\mathbb{P}^1$ の連接層の導来圏 $\mathbf{coh}\,\mathbb{P}^1$ は

$$\mathbf{coh}\,\mathbb{P}^1 \simeq \langle \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \rangle \tag{3.1}$$

と充満例外対象 (full exceptional collection) を用いて書けることが Beĭlinson [Beĭ78] によって知られている。

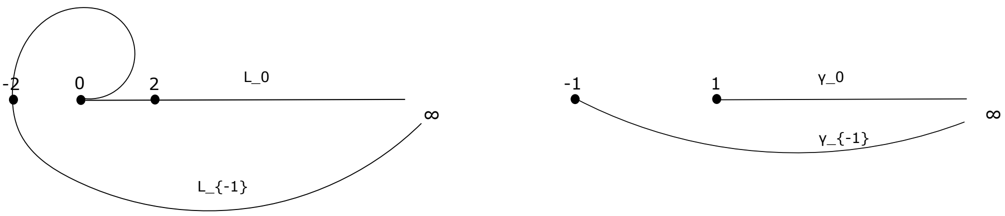

Figure 3.1: 右が vanighing path の絵、左が対応する Lefschetz 指貫。

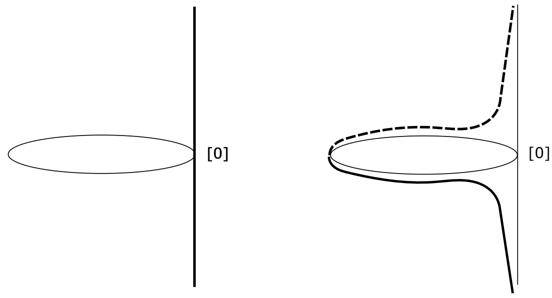

Figure 3.2: Lefschetz 指貫を T^*S^1 に移した図。左が L_0 で、右が L_{-1} である。点線は裏側を通っていることを示している。

一方の $W = z + \frac{1}{z}$ に対するシンプレクティック幾何学的な圏である、導来深谷-Seidel 圏 $\mathfrak{Fuk}(W)$ を思い出す [Sei01]。W の臨界点の集合は $\mathrm{Crit}(W) = \{\pm 1\}$ であり、臨界点の集合は $\mathrm{Crit(W)} = \{\pm 2\}$ である。参照点を W の値域である $\mathbb{C}$ の実軸上 $+\infty$ にとり、W の臨界値から参照点への道 (vanishing path) を選ぶ (図 3.1)。すると、導来する前の深谷-Seidel 圏 $\widetilde{Fuk}(W)$ は対象の集合として、臨界値 $-2, +2$ に対応する Lefschetz 指貫 (Lefschetz thimble)L_{-1}, L_0 をもつ (図 3.1 参照)。射は Floer コチェイン複体を用いて、

$$\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathfrak{Fuk}(W)}(L_i, L_{i'}) := CF^{\bullet}(L_i, L'_{i'}) \tag{3.2}$$

と定義される。ここで、$CF^{\bullet}$ は Floer コチェイン複体であり、$L'_{i'}$ は $W(L_{i'})$(vanishing path) を $+\infty$ の方で反時計回りにハミルトニアンイソトピーで無限小動かした道に対応する Lefschetz 指貫である。$\widetilde{\mathfrak{Fuk}}(W)$ を冪等完備前三角圏 (idempotent-complete pretriangulated category) になるように最小のとじ方をした圏を $\mathfrak{Fuk}(W)$ と定義する。すると、それぞれの圏で射を具体的に計算することによって、$\mathcal{O}(i) \mapsto L_i (i = 0, -1)$ をみたす擬圏同値

$$\mathbf{coh}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathfrak{Fuk}(W) \tag{3.3}$$

が構成できる。これが $\mathbb{P}^1$ の場合のホモロジー的ミラー対称性である [2]。

ところで、自然な同型 $\mathbb{C}^* \cong T^*S^1$ がある。よって、上で考えた Lefschetz 指貫 L_{-1}, L_0 はこの同型を通じて、T^*S^1 のラグランジュ部分多様体を定める (図 3.2)。よって、(再び大雑把

[2] $\mathbb{P}^1$ 側でシンプレクティック幾何学を考えるヴァージョンは扱わない。

に考えて [3]) この同型は埋め込み

$$\mathfrak{Fuk}(W) \hookrightarrow \mathfrak{Fuk}(\mathbb{C}^*) \cong \mathfrak{Fuk}(T^*S^1) \cong \mathbf{Sh}^c(S^1) \tag{3.4}$$

を示唆する。ここで、一番右では前節の Nadler-Zaslow の結果を使った。では、L_{-1}, L_0 は $\mathbf{Sh}^c(S^1)$ のどのような対象に対応するだろうか？ 図 3.2 および図 2.2 を見比べると、L_0 と $\mathrm{SS}(p_*\mathbb{C}_0)$ は一致し、L_{-1} は $\mathrm{SS}(p_*i_*\mathbb{C}_{(0,1)})$ のスムージングを与えるている (ように見える) ことがわかる。実際、Nadler-Zaslow の結果を詳細に見ると、この観察は正しいことがわかる。すなわち、ホモロジー的ミラー対称性は埋め込み

$$\mathrm{coh}(\mathbb{P}^1) \cong \mathfrak{Fuk}(W) \cong \langle p_*i_*\mathbb{C}_{(0,1)}, p_*\mathbb{C}_0 \rangle \hookrightarrow \mathbf{Sh}^c(S^1) \tag{3.5}$$

に読み替えられた。さらに、T^*S^1 の部分集合 $\Lambda_{\mathbb{P}^1}$ を、零切断と $[0] \in S^1$ の余接ファイバーの和集合で定義する。そして、$\mathbf{Sh}^c(S^1)$ の充満部分圏として、超局所台が $\Lambda_{\mathbb{P}^1}$ に入るもので張られる圏 $\mathbf{Sh}^c_{\Lambda_{\mathbb{P}^1}}(S^1)$ を考えると、$\mathbf{Sh}^c_{\Lambda_{\mathbb{P}^1}}(S^1) \simeq \langle p_*i_*\mathbb{C}_{(0,1)}, p_*\mathbb{C}_0 \rangle$ が簡単に証明できる。結局、$\mathbb{P}^1$ に対するホモロジー的ミラー対称性は

$$\mathbf{coh}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbf{Sh}^c_{\Lambda_{\mathbb{P}^1}}(S^1) \tag{3.6}$$

と読み替えられた。

(3.6) の圏同値およびトーリック多様体のあるクラスへの一般化は、Bondal [Bon06] によって知られていた。Fang-Liu-Treumann-Zaslow [FLTZ11, FLTZ14] は $\Lambda_{\mathbb{P}^1}$ の定義を一般の非特異固有トーリック多様体・軌道体に拡張し [4](3.6) の一般化を予想、そのトーラス同変版を証明した。彼らは、これらの圏同値を連接-構成可能対応 (coherent-constructible correspondence) と呼んだ。さらに、Fang-Liu-Treumann-Zaslow は T 双対性との関係を論じた [FLTZ12]。Treumann [Tre10] は非同変連接-構成可能を射影空間を含むあるクラスについて証明し、Scherotzke-Sibilla [SS16] は重み付き射影空間とトーリック del Pezzo 曲面を含むあるクラス、筆者 [Kuw15] はトーリック曲面の場合に証明した。さらに、Vaintrob [Vai] および筆者 [Kuw16] は、一般の場合の証明を与えた。

筆者の [Kuw16] はさらに非コンパクトへの一般化を含むものであり、固有の場合の証明にもその一般化を本質的に用いるので、ここでもう少し解説する。Fang-Liu-Treumann-Zaslow の $\Lambda_{\mathbb{P}^1}$ の非特異固有トーリック多様体 X への一般化 Λ_X は、任意のトーリック多様体に対しても適用できる定義である。しかし、(3.6) は非コンパクトの場合にはそのままは一般化されない。例えばアファイン直線 $\mathbb{A}^1$ の連接層の導来圏での構造層の自己射の空間は無限次元であるが、$\mathbf{Sh}^c(S^1)$ およびその部分圏の射の空間はいつでも有限次元である。よって、圏同値は起こりえない。

このような状況は、普通のホモロジー的ミラー対称性の文脈でも同じであり、シンプレクティック幾何側の圏の射の空間に無限次元空間を許すには、(部分) 巻き深谷圏 ((partially)wrapped Fukaya category) を導入しなければならない [AS10, Syl16]。超局所幾何で対応する概念は、Nadler [Nad16b] で導入された巻き構成可能層である。定義は簡単で、以下の通りである。Z を実解析多様体として、T^*Z のラグランジュ部分集合 Λ を固定する。構成可能層の定義から有限階数の条件を外したものを、準構成可能層と呼ぶ。準構成可能層の導来圏 $\mathbf{Sh}^\diamondsuit(Z)$ の充満部分圏として、Λ に超局所台が入る対象で張られる圏 $\mathbf{Sh}^\diamondsuit_\Lambda(Z)$ を考える。さらに、$\mathbf{Sh}^\diamondsuit_\Lambda(Z)$ の充満部分圏として、コンパクト対象が張る部分圏を $\mathbf{Sh}^w_\Lambda(Z)$ と書き、Z 上の Λ に沿った巻き構成可能層の圏と呼ぶ。巻き構成可能層の定義は巻き深谷圏の定義の仕方と全く異なり、また、

[3]なお、ここの議論は正当化可能な議論である。

[4]一般には実トーラス T^n の余接束のラグランジュ部分集合になるが、この論説では定義を与えない。原著を参照せよ。

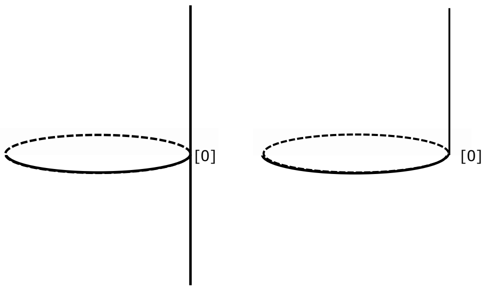

Figure 3.3: 左が $\Lambda_{\mathbb{P}^1}$、右が $\Lambda_{\mathbb{A}^1}$。

巻き構成可能層と巻き深谷圏の間には Nadler-Zaslow のような圏同値はまだ確立されていないが、確かに対応概念であることを裏付けるいろいろな証拠がある [Nad16b, IK16]。

[Kuw16] の主定理は以下である [5]。(非特異、非固有とは限らない) トーリック多様体 X について、$\mathbf{perf}(X)$ を X 上のパーフェクト複体 (perfect ompelx) の圏とする。X の次元が n のとき、Fang-Liu-Treumann-Zaslow による Λ_X は n 次元実トーラス T^n の部分集合を定める。

Theorem 3.1 ([Kuw16])**.** 以下の擬圏同値がある。

$$\mathbf{perf}(X) \simeq \mathbf{Sh}^w_{\Lambda_X}(T^n) \tag{3.7}$$

さらに、X がコンパクトのとき、$\mathbf{Sh}^w_{\Lambda_X}(T^n) \simeq \mathbf{Sh}^c_{\Lambda_X}(T^n)$ である。

X が非特異であれば $\mathbf{perf}(X) \simeq \mathbf{coh}(X)$ であることに注意すると、非特異固有トーリック多様体について、(3.6) の一般化になっていることが見て取れる。

4 The idea of proof

この最後の節では、Theorem3.1 の [Kuw16] における証明のアイデアを紹介する。証明のアイデアは簡潔で、「圏を貼り合わせる」ということである。このアイデアを実行するために、Theorem3.1 と等価な [6]

$$\mathbf{Qcoh}(X) \simeq \mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_X}(T^n) \tag{4.1}$$

に話を移す。以下、再び $\mathbb{P}^1$ を例にして説明する。

$\mathbb{P}^1$ は標準的なトーリック座標を用いて、押し出し $\mathbb{A}^1_0 \cup_{\mathbb{C}^*} \mathbb{A}^1_\infty$ と書ける。ここで、$\mathbb{A}^1_0$ と $\mathbb{A}^1_\infty$ はそれぞれアファイン直線 $\mathbb{A}^1$ に同型な 0 と ∞ の近傍である。準連接層の導来圏側では押し出しは引き戻しに変わり、

$$\mathbf{Qcoh}(\mathbb{A}^1_0) \times_{\mathbf{Qcoh}(\mathbb{C}^*)} \mathbf{Qcoh}(\mathbb{A}^1_\infty) \tag{4.2}$$

となる。正確には、この引き戻しは $\mathbf{Qcoh}(\mathbb{P}^1)$ と擬同型ではなく、擬同型にするにはホモトピー引き戻し $\mathbf{Qcoh}(\mathbb{A}^1_0) \times^h_{\mathbf{Qcoh}(\mathbb{C}^*)} \mathbf{Qcoh}(\mathbb{A}^1_\infty)$ をとらなければならない。この論説ではこれ以上にはホモトピー的議論には踏み込まない ([Toë11] などを見よ) が、今の場合は単に Čech 分解のことである。

上の引き戻しによる記述が示唆するのは、$\mathbf{Qcoh}(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_{\mathbb{P}^1}}(S^1)$ を証明するには、

[5]実際は、トーリックスタックのあるクラスにまで一般化されているが、ここでは簡単のため述べない。
[6]インド対象の圏をとることで得られる。戻るには、コンパクト対象をとればよい。

(i) (4.1) をアファインの場合について証明し、

(ii) 貼り合わせ $\mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_{\mathbb{A}^1_0}}(S^1) \times^h_{\mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_{\mathbb{C}^*}}(S^1)} \mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_{\mathbb{A}^1_\infty}}(S^1) \simeq \mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_{\mathbb{P}^1}}(S^1)$ を証明すれば十分である、

ということである。以下では、この二つの証明を簡潔に説明する。

まず、$\mathbb{C}^*$ の場合には、対応する $\Lambda_{\mathbb{C}^*} \subset T^*S^1$ は零切断である。すると、$\mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_{\mathbb{C}^*}}(S^1)$ の対象は非自明な超局所台を持たないので、S^1 上の局所系の導来圏である。ゆえに、$\mathbf{Qcoh}(\mathbb{C}^*)$ すなわち 1 変数 Laurent 多項式環の加群の導来圏と同値になる。つぎに、$\mathbb{A}^1$ の場合には、対応する $\Lambda_{\mathbb{A}^1}$ は図 3.3 のようになる。再び $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ をもちいて、$p_! i_! \mathbb{C}_{(-\infty,0)}$ なる準構成可能層を考えると、この層は「$\Lambda_{\mathbb{A}^1} \backslash T^*_{S^1}S^1$ に沿って単純」という性質を持つ。言い換えると、$\Lambda_{\mathbb{A}^1} \backslash T^*_{S^1}S^1$ 上の点で超局所台を測ろうとすると、局所コホモロジーが 1 次元ある、ということである。柏原-Schapira スタックを用いた Guillermou [Gui12] の議論を用いると、$p_! i_! \mathbb{C}_{(-\infty,0)}$ が $\mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_{\mathbb{A}^1}}(S^1)$ を生成し、しかも $\mathbf{Sh}^{\diamondsuit}_{\Lambda_{\mathbb{A}^1}}(S^1) \simeq \mathbf{Mod}(\mathrm{End}(p_! i_! \mathbb{C}_{(-\infty,0)}))$ がわかる。さらに、$\mathrm{End}(p_! i_! \mathbb{C}_{(-\infty,0)})$ が一変数多項式環 $\mathbb{C}[z]$ に同型であることもわかり、アファインの場合の証明がおわる。

最後に貼り合わせの説明をする。準連接層側では、貼り合わせをする射としては開集合の埋め込みに沿った引き戻しを使っていた。構成可能層側で対応する射は、Brown 表現定理などをつかって抽象的に作ることもできるが、実は今の場合には Tamakin [Tam08] によって発展させられた畳み込み (convolution) による超局所切り落とし (microlocal cut-off) を用いて具体的に記述することが可能である。その具体的表示を用いると、貼り合わせが証明できる (詳しくは [Kuw16] を見よ)。

References

[AS10] Mohammed Abouzaid and Paul Seidel, *An open string analogue of Viterbo functoriality*, Geom. Topol. **14** (2010), no. 2, 627–718. MR 2602848

[Beĭ78] A. A. Beĭlinson, *Coherent sheaves on* $\mathbf{P}^n$ *and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), no. 3, 68–69. MR 509388

[Bon06] A. I. Bondal, *Derived categories of toric varieties*, Convex and Algebraic geometry, Oberwolfach conference reports **3** (2006), 284–286.

[BZN16] David Ben-Zvi and David Nadler, *Betti geometric langlands*, eprint arXiv:1606.08523 (2016).

[FLTZ11] Bohan Fang, Chiu-Chu Melissa Liu, David Treumann, and Eric Zaslow, *A categorification of Morelli's theorem*, Invent. Math. **186** (2011), no. 1, 79–114. MR 2836052

[FLTZ12] ———, *T-duality and homological mirror symmetry for toric varieties*, Adv. Math. **229** (2012), no. 3, 1875–1911. MR 2871160

[FLTZ14] ———, *The coherent-constructible correspondence for toric Deligne-Mumford stacks*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2014), no. 4, 914–954. MR 3168399

[Giv95] Alexander B. Givental, *Homological geometry and mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 472–480. MR 1403947

[GKS12] Stéphane Guillermou, Masaki Kashiwara, and Pierre Schapira, *Sheaf quantization of Hamiltonian isotopies and applications to nondisplaceability problems*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 2, 201–245. MR 2876930

[Gui12] Stephane Guillermou, *Quantization of conic Lagrangian submanifolds of cotangent bundles*, arXiv preprint arXiv:1212.5818 (2012).

[HV00] Kentaro Hori and Cumrun Vafa, *Mirror symmetry*, arXiv preprint arXiv:hep-th/0002222 (2000).

[IK16] Yuichi Ike and Tatsuki Kuwagaki, *Categorical localization for the coherent-constructible correspondence*, eprint arXiv:1609.01177 (2016).

[Kas84] Masaki Kashiwara, *The Riemann-Hilbert problem for holonomic systems*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **20** (1984), no. 2, 319–365. MR 743382

[Kon95] Maxim Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), Birkhäuser, Basel, 1995, pp. 120–139. MR 1403918

[KS85] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Microlocal study of sheaves*, Astérisque (1985), no. 128, 235, Corrections to this article can be found in Astérisque No. 130, p. 209. MR 794557

[KS90] ———, *Sheaves on manifolds*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1990. MR 1299726 (95g:58222)

[Kuw15] Tatsuki Kuwagaki, *The nonequivariant coherent-constructible correspondence for toric surfaces*, arXiv preprint arXiv:1507.05393, to appear in Journal of Differential Geometry (2015).

[Kuw16] Tatsuki Kuwagaki, *The nonequivariant coherent-constructible correspondence for toric stacks*, arXiv preprint arXiv: (2016).

[Nad09] David Nadler, *Microlocal branes are constructible sheaves*, Selecta Math. (N.S.) **15** (2009), no. 4, 563–619. MR 2565051

[Nad15] David Nadler, *A combinatorial calculation of the Landau-Ginzburg model $M = \mathbb{C}^3$,$W = z_1z_2z_3$*, arXiv preprint arXiv:1507.08735 (2015).

[Nad16a] ———, *Mirror symmetry for the Landau-Ginzburg A-model $M = \mathbb{C}^n, W = z_1 \cdots z_n$*, arXiv preprint arXiv:1601.02977 (2016).

[Nad16b] ———, *Wrapped microlocal sheaves on pair of pants*, eprint arXiv:1604.00114 (2016).

[NZ09] David Nadler and Eric Zaslow, *Constructible sheaves and the Fukaya category*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 1, 233–286. MR 2449059

[Sei01] Paul Seidel, *Vanishing cycles and mutation*, European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000), Progr. Math., vol. 202, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 65–85. MR 1905352

[SKK73] *Hyperfunctions and pseudo-differential equations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 287, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1973, Dedicated to the memory of André Martineau, Edited by Hikasaburo Komatsu. MR 0388082

[SS16] Sarah Scherotzke and Nicolò Sibilla, *The non-equivariant coherent-constructible correspondence and a conjecture of King*, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), no. 1, 389–416. MR 3437841

[STZ14] Vivek Shende, David Treumann, and Eric Zaslow, *Legendrian knots and constructible sheaves*, Inventiones mathematicae, DOI:10.1007/s00222-016-0681-5 (2014).

[Syl16] Zachary Sylvan, *On partially wrapped Fukaya categories*, arXiv preprint arXiv:1604.02540 (2016).

[Tam08] Dmitry Tamarkin, *Microlocal condition for non-displaceablility*, eprint arXiv:0809.1584 (2008).

[Tam15] ———, *Microlocal category*, arXiv preprint arXiv:1511.08961 (2015).

[Toë11] Bertrand Toën, *Lectures on dg-categories*, Topics in algebraic and topological K-theory, Lecture Notes in Math., vol. 2008, Springer, Berlin, 2011, pp. 243–302. MR 2762557

[Tre10] David Treumann, *Remarks on the nonequivariant coherent-constructible correspondence for toric varieties*, arXiv preprint arXiv:1006.5756 (2010).

[Vai] Dmitry Vaintrob, *The coherent-constructible correspondence and incomplete topologies*, preprint available at the author's webpage.

Tatsuki Kuwagaki

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan.

e-mail address : kuwagaki@ms.u-tokyo.ac.jp